Ejercicio 4 - Extraordinaria 18/19. Sea V el conjunto de los polinomios de grado menor o igual que 1. Definimos:

$$< p(x), q(x) > = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx$$

1. Enunciar las propiedades del producto escalar y demostrar dos de ellas.
2. Calcular la matriz de Gram respecto de la base canónica.
3. Calcular la matriz de Gram respecto de la base $\{3x, 1\}$.
4. Estudiar, explícitamente, la relación entre ambas matrices de Gram.

1) Los enunciados de las propiedades del producto escalar las tenéis en las presentaciones de clase. Por demostrar propiedades distintas en los dos ejercicios resueltos, os voy a probar aquí la segunda y la tercera propiedad:

<u>Propiedad 2</u>: $< p(x) + q(x),\ r(x) > = < p(x),\ r(x) > + < q(x),\ r(x) >$

$$< p(x) + q(x), r(x) > = \int_{-1}^{1} \big(p(x) + q(x)\big) r(x)dx = \int_{-1}^{1} (p(x)r(x) + q(x)r(x))dx$$

$$= \int_{-1}^{1} p(x)r(x)dx + \int_{-1}^{1} q(x)r(x)\, dx = < p(x), r(x) > + < q(x), r(x) >$$

Propiedad 3: $< \alpha p(x),\ q(x) > = \alpha < p(x), q(x) >$

$$< \alpha p(x), q(x) > = \int_{-1}^{1} \big(\alpha p(x)\big) q(x) dx = \int_{-1}^{1} \alpha (p(x) q(x)) dx = \alpha \int_{-1}^{1} p(x) q(x) dx = \alpha < p(x), q(x) >$$

2) La matriz de Gram respecto de la base $B_c = \{1, x\}$ será la matriz G cuyos coeficientes a_{ij} viene dado por el producto escalar del elemento i-ésimo de B_c con el elemento j-ésimo de B_c, así:

a_{11} = <1, 1> = $\int_{-1}^{1} dx = x\Big]_{-1}^{1} = 1 - (-1) = 2$

a_{12} = <1, x> = $\int_{-1}^{1} x dx = \frac{x^2}{2}\Big]_{-1}^{1} = \frac{1}{2} - \frac{(-1)^2}{2} = 0$

a_{22} = <x, x > == $\int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big]_{-1}^{1} = \frac{1}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = \frac{2}{3}$

$$G = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

3) La matriz de Gram respecto de la base B = $\{3x, 1\}$ será la matriz G cuyos coeficientes a_{ij} viene dado por el producto escalar del elemento i-ésimo de B con el elemento j-ésimo de B, así:

$$a_{11} = <3x, 3x> = \int_{-1}^{1}(3x)^2 dx = 3x^3\Big]_{-1}^{1} = 3(1-(-1)^3) = 6$$

$$a_{12} = <3x, 1> = \int_{-1}^{1} 3x dx = \frac{3x^2}{2}\Big]_{-1}^{1} = \frac{3}{2} - \frac{3(-1)^2}{2} = 0$$

$$a_{22} = <1, 1> = \int_{-1}^{1} dx = x\Big]_{-1}^{1} = 1-(-1) = 2$$

$$G' = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

4) Para estudiar la relación entre ambas matrices de Gram tenemos que calcular la matriz del cambio de base entre la base B y la base canónica, que como sabemos es la matriz regular cuyas columnas son las coordenadas de B con respecto a la base canónica:

$3x = (0, 3)_{Bc}$

$1 = (1, 0)_{Bc}$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

La relación entre las dos matrices de Gram viene dada por: $G' = P^t G P$

$$P^t G P = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = G'$$